Γλυφάδα 10/10/2020,

<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ</u>

Μάθημα: ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ	
Καθηγητής	**Χρόνος: 2 ΩΡΕΣ**
Ονοματεπώνυμο:	**Τμήμα:**

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$. **Λ**

β) Αν $\frac{\alpha}{\beta}>0$, τότε οι αριθμοί α,β είναι ομόσημοι. **Σ**

γ) Αν $\alpha+\beta>0$, τότε οι α,β είναι θετικοί. **Λ**

δ) Αν $\alpha(\beta^2+1)<0$, τότε $\alpha<0$. **Σ**

ε) Ισχύει ότι $\alpha^{\mu}+\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$. **Λ**

στ) Ισχύει ότι $(-\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2$ **Σ**

ζ) Αν οι αριθμοί μ,ν είναι αντίθετοι τότε ισχύει ότι $2^{\mu}2^{\nu}=1$. **Σ**

η) Ισχύει ότι $\alpha^2>0$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ **Λ**

Α.2. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\left(2x+y\right)^2=4x^2+4xy+y^2$

β) $\left(3\alpha+2\beta\right)^2=9\alpha^2+12\alpha\beta+4\beta^2$

γ) $\left(3x+2y\right)\left(9x^2-6xy+4y^2\right)=27x^3+8y^3$

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β.1. Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2-4\alpha+5>0$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

$\alpha^2-4\alpha+5>0 \Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha+4+1>0 \Leftrightarrow \left(\alpha-2\right)^2+1>0$ που ισχύει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$

ii. $\alpha^2+\beta^2+10\geq 2\left(\alpha+3\beta\right)$,για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha^2+\beta^2+10\geq 2\left(\alpha+3\beta\right) \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+10\geq 2\alpha+6\beta \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2-2\alpha+\beta^2-6\beta+10\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-6\beta+9\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(\alpha^2-1\right)^2+\left(\beta-3\right)^2\geq 0$$

που ισχύει για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

B.2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $\mathrm{A} = \dfrac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^2 - 9}$

ΛΥΣΗ

$$\mathrm{A} = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^2 - 9} = \frac{2x\left(x^2 - 6x + 9\right)}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{2x(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x(x-3)}{x+3}$$

ii. $\mathrm{B} = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1} \cdot \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}$

ΛΥΣΗ

$$\mathrm{B} = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2(x+1) - (x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)\left(x^2-1\right)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

iii. $\Gamma = \dfrac{x-2}{x^2 - 2x + 4} : \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$

ΛΥΣΗ

$$\Gamma = \frac{x-2}{x^2 - 2x + 4} : \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8} = \frac{x-2}{x^2 - 2x + 4} \cdot \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{(x-2)\left(x^3+8\right)}{\left(x^2 - 2x + 4\right)\left(x^2 - 4\right)} = \frac{(x-2)(x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right)}{\left(x^2 - 2x + 4\right)(x-2)(x+2)} = 1$$

Β.3. Αν $\alpha > 2$ να αποδείξετε ότι $\alpha^3 > 2\alpha^2 - \alpha + 2$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha^3 > 2\alpha^2 - \alpha + 2 \Leftrightarrow \alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2(\alpha - 2) + (\alpha - 2) > 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)(\alpha^2 + 1) > 0 \quad (1)$$

Όμως $\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 > 0$ και από υπόθεση $\alpha > 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 > 0$.

Άρα η (1) ισχύει ως γινόμενο θετικών .

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-2)^3 + 5(x-1)^2 + (x-6)(x+4)$

Γ.1. Να δείξετε ότι $P(x) = x^3 - 27$

ΛΥΣΗ

$$P(x) = (x-2)^3 + 5(x-1)^2 + (x-6)(x+4) \Leftrightarrow$$
$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 5(x^2 - 2x + 1) + x^2 + 4x - 6x - 24 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 5x^2 - 10x + 5 + x^2 + 4x - 6x - 24 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = x^3 - 27$$

Θεωρούμε επιπλέον την παράσταση $K = \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 5x + 6}$

Γ.2. Να βρείτε για ποίες τιμές του x ορίζεται η παράσταση K και στην συνέχεια να την απλοποιήσετε .

ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται η παράσταση K θα πρέπει $x^2 - 5x + 6 \neq 0$

$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq 3$.

Άρα η παράσταση K ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2,3\}$.

Για κάθε $x \neq 2$ και $x \neq 3$ ισχύει ότι

$$K = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2 + 3x + 9}{x-2}$$

Γ.3. Να δείξετε ότι $\dfrac{x^3-27}{x^2-5x+6}-(x+5)=\dfrac{19}{x-2}$ (2).

ΛΥΣΗ

$$\frac{x^3-27}{x^2-5x+6}-(x+5)=\mathrm{K}-(x+5)=\frac{x^2+3x+9}{x-2}-(x+5)=$$

$$=\frac{x^2+3x+9}{x-2}-\frac{(x+5)(x-2)}{x-2}=\frac{x^2+3x+9-\left(x^2+3x-10\right)}{x-2}=$$

$$=\frac{x^2+3x+9-x^2-3x+10}{x-2}=\frac{19}{x-2}$$

Γ.4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{1002^3-27}{1002^2-5\cdot 1002+6}-1007$.

ΛΥΣΗ

Η σχέση (2) για $x=1002$ γίνεται :

$$\frac{1002^3-27}{1002^2-5\cdot 1002+6}-(1002+5)=\frac{19}{1002-2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1002^3-27}{1002^2-5\cdot 1002+6}-1007=\frac{19}{1000}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1002^3-27}{1002^2-5\cdot 1002+6}-1007=0{,}019$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\dfrac{x^2+6xy+9y^2}{18}\cdot\dfrac{6}{x^2-9y^2}$ με $x\neq 0$, $y\neq 0$ και $x\neq \pm 3y$

Δ.1. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=\dfrac{x+3y}{3x-9y}$.

ΛΥΣΗ

Για $x\neq 0$, $y\neq 0$ και $x\neq \pm 3y$ ισχύει ότι

$$\mathrm{A}=\frac{x^2+6xy+9y^2}{18}\cdot\frac{6}{x^2-9y^2}=\frac{\left(x+3y\right)^2}{18}\cdot\frac{6}{\left(x-3y\right)\left(x+3y\right)}=$$
$$=\frac{\left(x+3y\right)^2}{18}\cdot\frac{6}{\left(x-3y\right)\left(x+3y\right)}=\frac{6\left(x+3y\right)^2}{18\left(x-3y\right)\left(x+3y\right)}=\frac{x+3y}{3\left(x-3y\right)}=$$
$$=\frac{x+3y}{3x-9y}$$

Δ.2. Αν $\mathrm{A}=1$ τότε:

i. Να δείξετε ότι $\dfrac{x}{y}=6$.

ΛΥΣΗ

$$\mathrm{A}=1\Leftrightarrow\frac{x+3y}{3x-9y}=1\Leftrightarrow x+3y=3x-9y\Leftrightarrow -2x=-12y$$
$$\Leftrightarrow x=6y\Leftrightarrow\frac{x}{y}=6,\quad \text{για}\quad y\neq 0$$

ii. Να δείξετε ότι $\dfrac{3x-6y}{x-2y}=3$

ΛΥΣΗ

$$\frac{3x-6y}{x-2y}=\frac{\dfrac{3x}{y}-\dfrac{6y}{y}}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{2y}{y}}=\frac{18-6}{6-2}=3$$

iii. Να υπολογίσετε την παράσταση $\mathrm{B}=\dfrac{x\left(x^4y\right)^4}{6^{11}x^{-9}\left(36y\right)^5\left(27x^{-2}y^7 8\right)^5}$

ΛΥΣΗ

$$\mathrm{B}=\frac{x\left(x^4y\right)^4}{6^{11}x^{-9}\left(36y\right)^5\left(27x^{-2}y^7 8\right)^5}=\frac{x\cdot x^{16}\cdot y^4}{6^{11}x^{-9}\left(6^2y\right)^5\left(3^3x^{-2}y^7 2^3\right)^5}$$

$$=\frac{x^{17}y^4}{6^{11}x^{-9}6^{10}y^5 3^{15}x^{-10}y^{35}2^{15}}=\frac{x^{17}y^4}{6^{21}x^{-19}y^{40}6^{15}}=\frac{1}{6^{36}}\frac{x^{36}}{y^{36}}=$$

$$=\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{y}\right)^{36}=\left(\frac{1}{6}\cdot 6\right)^{36}=1$$