ΓΛΥΦΑΔΑ 24/10/2020

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:	ΧΡΟΝΟΣ : 3 ΩΡΕΣ
ΟΝΟΜ/ΝΟ:	ΤΑΞΗ:

ΘΕΜΑ Α

Α.1 . Έστω το πολυώνυμο $\mathbf{P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\ldots\alpha_1 x+\alpha_0}$ και $\mathbf{x_0 \in R}$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Μονάδες 3

Α.2 Πότε μια συνάρτηση **f** **δεν είναι συνεχής** σε ένα σημείο $\mathbf{x_0}$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 2

Α.3 Να διατυπώσετε το Θεώρημα **Bolzano** για μια συνάρτηση **f** η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 3+3

Α.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν **f(x) >** 0 κοντά στο $\mathbf{x_0}$, τότε υποχρεωτικά $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$.

β) Μια συνάρτηση **f** είναι **1-1**, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της **f** το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, x>0 \\ x-1, x<0 \end{cases}$ είναι συνεχής.

ε) Αν για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει **f(-1) =- 1** και **f(1) = 1**, τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{x_0} \in (-1,1)$ ώστε $\mathbf{f(x_0) = 0}$.

Μονάδες 10

Α.5 **<<**Αν μια συνάρτηση **f** δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της τότε και η $|f|$ δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό>>.

α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;

Μονάδα 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 3

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+\ln x-1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης **f**.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση **f** είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες 5

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(\ln x)=x$.

Μονάδες 5

Β.2 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x) & ,x\le 1 \\ \alpha x^2-3x+2\beta & ,1<x\le 2 \\ \ln(x-1)+\eta\mu(\pi x)+\beta-1 & ,x>2 \end{cases}$

α) Να βρεθούν οι τιμές των **α** και **β** ώστε η **f** να είναι συνεχής.

Μονάδες 5

β) Για **α = β = 1**, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 5

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$H(x)\cdot\eta\mu x\le x^4\eta\mu\frac{1}{x}+x\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

Αν $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = k \in \mathbb{R}$, τότε:

Γ.1 Να δείξετε ότι **κ = 1**.

Μονάδες 5

Γ.2 Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \ln x + \dfrac{\lim\limits_{t\to 0}(x - H(t))}{x}$ είναι **1–1**.

Μονάδες 7

Γ.3 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + e^{f(x)} = h\left(e^x + x\right), \text{ για κάθε } x \in R$$

Να δείξετε ότι η **f** είναι **1–1**.

Μονάδες 7

Γ.4 Να λύσετε την εξίσωση $f^3\left(x^2 - 2\right) + f\left(x^2 - 2\right) = f^3(x) + f(x)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = e^{-x} - 3x^3 - 1$ και $f(x) = \eta\mu g(x) - e^{-x} + 3x^3 + 1$ $x \in R$

Δ.1 Να δείξετε ότι η **g** αντιστρέφεται και να βρείτε το $g^{-1}(\frac{1}{e} - 4)$.

Μονάδες 1+3

Δ.2 Να βρείτε τη ρίζα και το πρόσημο της **g**.

Μονάδες 1+3

Δ.3 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$.

Μονάδες 5

Δ.4 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2^{f(x)}+3^{f(x)}-5}{3^{f(x)}+5^{f(x)}}\right)$.

Μονάδες 5

Δ.5 α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g^2(x_0)+4g(x_0)=5-x_0$.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι για το x_0 του παραπάνω ερωτήματος, ισχύει $f(x_0)>0$.

Μονάδες 2

<u>Ευχόμαστε επιτυχία</u>