

Γλυφάδα 04/01/2018,

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ	
Καθηγητής	Χρόνος: 3 ΩΡΕΣ
Όνοματεπώνυμο:	Τμήμα: Γ'

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = a^x \ln a$.

Μονάδες 9

A.2 Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 3

A.3 Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano.

Μονάδες 3

A.4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A_f$ τότε η f είναι οπωσδήποτε και παραγωγίσιμη στο x_0 .

β) Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια στο πεδίο ορισμού της τότε είναι και ένα προς ένα.

γ) Αν $f(1) = g(1)$ τότε και $f'(1) = g'(1)$

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (α, β) , $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = -\infty$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \mathbb{R}$..

ε) Ισχύει ο τύπος $(5^x)' = x \cdot 5^{x-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$

B.1 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

Μονάδες 3

B.2 Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

Μονάδες 5

B.3 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Μονάδες 5

B.4 Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

Μονάδες 3

B.5 Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x - 1$.

Μονάδες 4

B.6 Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(e^{x+1}) - x - \lambda^x - 1}{e^x + \lambda^{x+1}}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda > 0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3}{x - 1} = -4$ και $f(3) = 10$

Γ.1 Να δείξετε ότι $f(1) = 1$.

Μονάδες 5

Γ.2 Να δείξετε ότι η $f'(1) = -1$.

Μονάδες 6

Γ.3 Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής με την ευθεία $(\varepsilon) : y = 3x - 1$ στο διάστημα $(1,3)$

Μονάδες 7

Γ.4 Να δείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-2h)}{h} = -5$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$ και $g(x) = -x^2 - x$.

Δ.1. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$.

Μονάδες 5

Δ.2. Να δείξετε ότι η ε εφάπτεται στην γραφική παράσταση της g

Μονάδες 6

Δ.3. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\alpha \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε
 $e^\alpha + 2\alpha + 1 = 0$

Μονάδες 7

Δ.4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - g(x) = 2018$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Μονάδες 7

Καλή Επιτυχία