Γλυφάδα 11/11/2017,

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ	
Καθηγητής	**Χρόνος: 3 ΩΡΕΣ**
Ονοματεπώνυμο:	**Τμήμα: Γ’**

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\eta$.

Μονάδες 9

Α.2 Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano .

Μονάδες 3

Α.3 Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 3

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν είναι $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$.

β) Αν η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\beta)>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και η συνάρτηση g είναι και αυτή συνεχής στο x_0, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

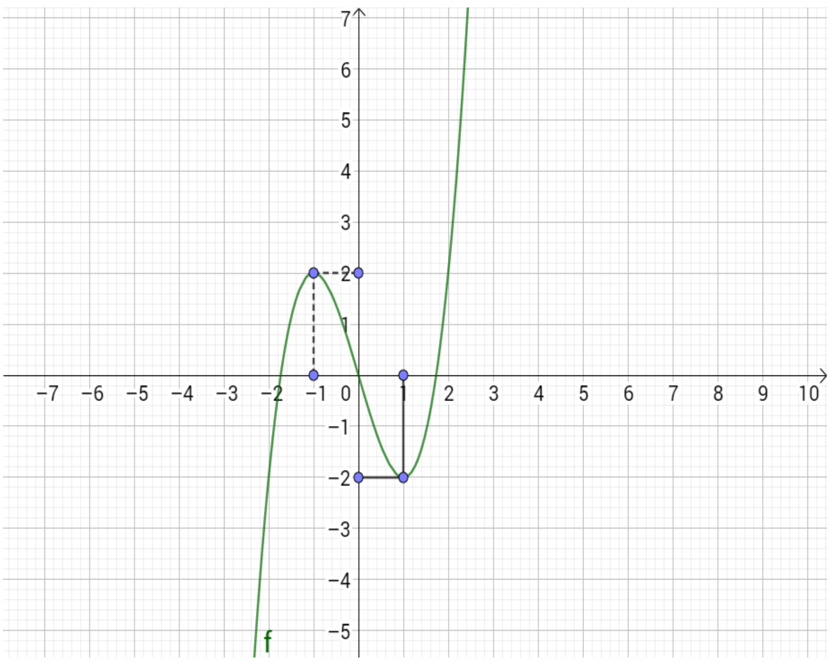
δ) Αν η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ δεν μπορεί να έχει σύνολο τιμών το $f(\mathrm{A})=\mathbb{R}$.

ε) Αν μια συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{1-1}$ είναι οπωσδήποτε γνησίως μονότονη.

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



Β.1. Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f και να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 5

Β.2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα όπου η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα καθώς και τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων.

Μονάδες 7

Β.3. Να εξετάσετε αν η πρόταση << η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της >> είναι Σωστή ή Λάθος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β.4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν :

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x)}$

iv. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-3x^3}{\left(f(x)+2\right)^2}$ **v.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{f(x)}$

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ 3^{ο}</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f^3(x)t^2+t+f(x)t\sqrt{t^2+1}}{t^2+t+1} = x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ.1. Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ.2 Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται με $f^{-1}(x)=x^3+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=1-4x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$

Μονάδες 5

Γ.3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f^{-1}(x^2+x)-8\right)=1$

Μονάδες 5

Γ.4. Να δείξετε ότι $|f(x)-f(y)|\le|x-y|\le|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ.5. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

.

<u>ΘΕΜΑ 4^{o}</u>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ και $e^{2f(x)}=1+4xe^{f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\left(f(x)\right)}{f^2(x)}$

Μονάδες 6

γ) Αν επιπλέον θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{f(x)}$ για $x\geq 0$

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=2018$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,+\infty)$

Μονάδες 5

ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=h(x)\left(x+\ln(\lambda x)\right)$, $\lambda>0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

Μονάδες 4

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h^2(x)+3x^2+xh(x)}{h^2(x)+x^2}$

Μονάδες 4