

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Μάθημα : Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ Λυκείου	
Καθηγητής/τρια:	Χρόνος: 3 ώρες
Όνοματεπώνυμο:	Τμήμα:

Θέμα Α

**Α1.**

1. Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $ho(gof)$ , τότε ορίζεται και η  $(hog)of$  και ισχύει  $ho(gof) = (hog)of$ 

Σ	Λ
---	---
  
2. Αν δύο συναρτήσεις  $f, g$  είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f(x) \geq 0$  και  $g(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ , τότε η συνάρτηση  $fg$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

Σ	Λ
---	---
  
3. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι 1 - 1, τότε ισχύουν:
  - i)  $f(f^{-1}(x)) = x$  για κάθε  $x$  που ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$ 

Σ	Λ
---	---
  - ii)  $f^{-1}(f(x)) = x$  για κάθε  $x \in Df$ .

Σ	Λ
---	---
  
4. Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

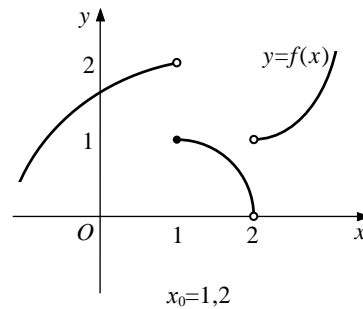
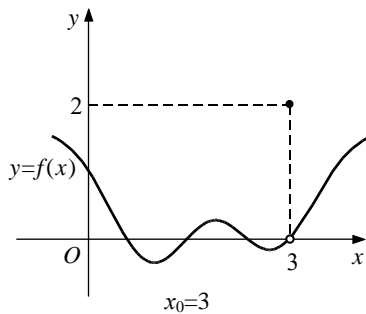
Σ	Λ
---	---
  
5. Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) ελάχιστο, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) < f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .

Σ	Λ
---	---

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**Α2** Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  δεν έχει όριο στο  $x_0 = 0$  **ΣΛ (μοναδες 2)** Να αιτιολογήσετε την απάντηση (μοναδες 3)

**A3.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και το  $f(x_0)$ , εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  είναι:



**ΜΟΝΑΔΕΣ 15**

**Θέμα 2**

**A** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$

**α.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$

**β.** Να υπολογίσετε το όριο  $\alpha = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{f(x) - 5}$

**γ.** Να υπολογίσετε το όριο  $\beta = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{|f^{-1}(x) - 11| - 8}$

**δ** Αν για τη συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $g(\alpha) = g(\beta)$ , όπου  $\alpha, \beta$  οι τιμές των ορίων των ερωτημάτων 2. και 3. αντίστοιχα, τότε να εξετάσετε αν η  $g$  είναι 1-1.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 15**

**B.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  και  $g(x) = -x$ . Να αποδείξετε ότι  $f \circ g = -f$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

**A.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει:

- $(f \circ f)(x) = x + f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(g(x) - e^x - x + 1) = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

β. Να βρείτε τη συνάρτηση  $g$

Αν  $g(x) = e^x + x - 1$ , τότε:

γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $h(x) = \ln(g(x))$

δ. Να αποδείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $g^{-1}(e^{x^2+1} + x^2) = 2$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 15**

**B.** Δίνετε η συνάρτηση  $h(x) = e^x + \ln(x+1) + 2$

α. Να λύσετε την ανίσωση  $h(x^2) \leq h(x+2)$

β. . Να λύσετε την εξίσωση  $e^{2x+3} - e^{x^2} = \ln(x^2 + 1) - \ln(2x + 4)$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

**A.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \ln(1+e^x)$  και  $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

α. Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

β. Να δείξετε ότι η  $g$  είναι περιττή.

γ. Δίνεται επιπλέον συνάρτηση  $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε να ισχύει  $h \circ f = g$

Να βρείτε τον τύπο της.

δ. Αν  $h(x) = 1 - 2e^{-x}$ , τότε να αποδείξετε ότι  $h(e^x) + h(e^{2x}) < h(e^{3x}) + h(e^{4x})$ , για κάθε  $x > 0$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 15**

**B.** Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu x + \varepsilon\phi x = \sigma\upsilon\nu x - x - 1$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

**Καλή επιτυχία**